Espace de tenseurs et théorie classique des invariants

Olive Marc[a], Kolev Boris[a], Auffray Nicolas[b]

[a]LATP, CNRS & Université de Provence, 39 Rue F. Joliot-Curie, 13453 Marseille Cedex 13, France
[b]LMSME, Université Paris-Est, Laboratoire Modélisation et Simulation Multi Echelle,MSME UMR 8208 CNRS, 5 bd Descartes, 77454 Marne-la-Vallée, France

Motivations mécaniques

- La question des invariants intervient naturellement en élasticité linéaire, pour identifier et reconstruire un tenseur d'élasticité ;
- En élasticité classique, l'énergie libre ne dépend que des invariants du tenseur de Green-Lagrange ;
- En milieu du second gradient l'énergie dépend du gradient de la déformation, noté ∇E.

Tenseur associé au second gradient

- Le tenseur du troisième ordre $T_{(ij)k} = \nabla E$ possède des symétries hérités du tenseur E ;
- Ce tenseur se décompose en deux temps :

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{T}_{(ij)k} \arrow[dl, "\text{Sym}"'] \arrow[dr, "\text{Asym=Id}-\text{Sym}"] & \\
\mathbb{S}_{(ijk)} \arrow[d, "\mathcal{H}"] & & \mathbb{R}_{ij} \arrow[d, "\mathcal{H}"] \\
\mathbb{H}^3 \oplus \mathbb{H}^1_a & & \mathbb{H}^{\sharp 2} \oplus \mathbb{H}^1_b
\end{tikzcd}
$$

où $\mathbb{H}^k$ est l'espace de tenseur totalement symétrique de trace nulle ;

Contexte mathématique

- On travaille avec des sous-espaces **V** de tenseurs de $\mathbb{R}^3$;
- Il y a une action naturelle de $\mathcal{O}(3)$ sur **V**. Par exemple a l'ordre 4 :

$$(g \cdot \mathrm{T})_{ijkl} = g_{ii_1} g_{ji_2} g_{ki_3} g_{li_4} \mathrm{T}_{i_1 i_2 i_3 i_4}$$

- On cherche a décrire l'algèbre des polynômes invariants sous l'action de $\mathcal{O}(3)$;
- Hilbert (1888) a démontré que cette algèbre possédait un nombre fini de générateurs (une base d'invariants) ;
- La difficulté est d'obtenir des méthodes effectives pour trouver une base d'invariants.

Algèbre graduée et série de Hilbert

- Une algèbre graduée, qui est typiquement une algèbre de polynôme a plusieurs variables comme $\mathbb{C}[X, Y]$, va s'écrire

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1 \oplus \cdots \text{ avec } \mathcal{A}_i\mathcal{A}_j \subset \mathcal{A}_{i+j}$$

- On définit la série de Hilbert comme étant la série formelle

$$H_{\mathcal{A}}(t) := \sum_i dim(\mathcal{A}_i)t^i$$

- En prenant par exemple l'algèbre $\mathcal{A} = \mathbb{C}[X, Y]$ on a

$$H_{\mathcal{A}}(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$$

Invariants primaires et algèbre de Cohen-Macaulay

- L'algèbre $\mathbb{C}[X, Y, Z]$ est engendré par des variables libres ;
- L'algèbre $\mathbb{C}[x, y, z] = \mathcal{C}[X, Y, Z]/\langle Z^2 - XY\rangle$ est engendrée par des variables liées par la relation $z^2 = xy$;
- Une algèbre $\mathcal{A}$ est de type Cohen-Macaulay lorsqu'il existe une base composée d'invariants primaires $\theta_1, \cdots, \theta_s$ et d'invariants $\eta_1, \cdots, \eta_r$ telle que

$$\mathcal{A} = \eta_1\mathbb{C}[\theta_1, \cdots, \theta_s] \oplus \cdots \oplus \eta_r\mathbb{C}[\theta_1, \cdots, \theta_s]$$

- Si on prend par exemple $\mathcal{B} = \mathbb{C}[I_2, I_4, J_4] \subset \mathbb{C}[x, y]$ avec

$$I_2 = x^2 + y^2 \,;\; I_4 = x^2y^2 \,;\; J_4 = xy^3 - x^3y$$

  On aura

$$\mathcal{B} = \mathbb{C}[I_2, I_4] \oplus J_4\mathbb{C}[I_2, I_4]$$

Algèbre d'invariants

- Un théorème fondamental de Hochster and Roberts (1974) montre que les algèbres d'invariants sont de type Cohen-Macaulay ;
- Une conséquence est qu'une fois connu le jeu d'invariants primaires on connaît une borne sur le degré des invariants a chercher ;
- Cette borne est connue via la série de Hilbert de l'algèbre des invariants.

Calculs d’invariants par la méthode de Hilbert

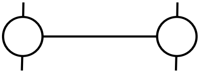
- Etant donné un espace de tenseur **V**, on peut calculer sa série de Hilbert *a priori* ;
- Par des opérations de trace on peut produire des invariants degré par degré ;
- On cherche a déterminer un jeu d’invariants primaires ;
- Cette étape, qui est la plus difficile, nécessite des outils de géométrie algébrique ;
- La borne sur le degré étant déterminée, on peut alors conclure par des calculs de dimensions.

Tenseur d'ordre 3 totalement symétrique de trace nulle

- Par les espaces de tenseurs, on va privilégier les espaces de tenseurs D totalement symétriques de traces nulle.
- A l'ordre 3 on note cet espace $\mathbb{H}^3$ dont la série de Hilbert sera

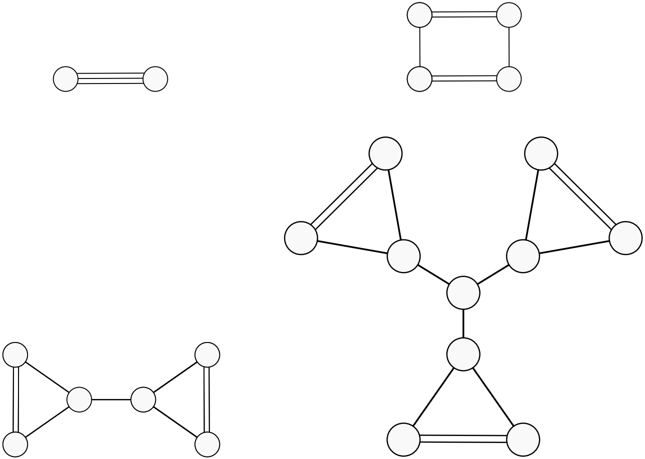
$$H(t) = \frac{1}{(1-t^2)(1-t^4)(1-t^6)(1-t^{10})}$$

- Pour représenter un invariant on utilise la forme graphique ;
- Le tenseur contracté $T_{ijkl} = D_{iji_1} D_{kli_1}$ sera représenté par le graphique :



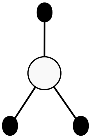
Base d'invariants de $\mathbb{H}^3$

Une base sera donnée par



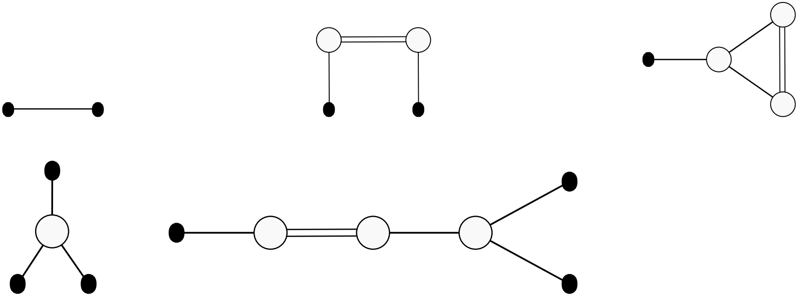
Espace de tenseurs totalement symétrique

- L'espace de tenseurs totalement symétrique se décompose en $\mathbb{H}^3 \oplus \mathbb{H}^1$;
- On va représenter les invariants par des molécules composé de deux types d'atomes ; par exemple

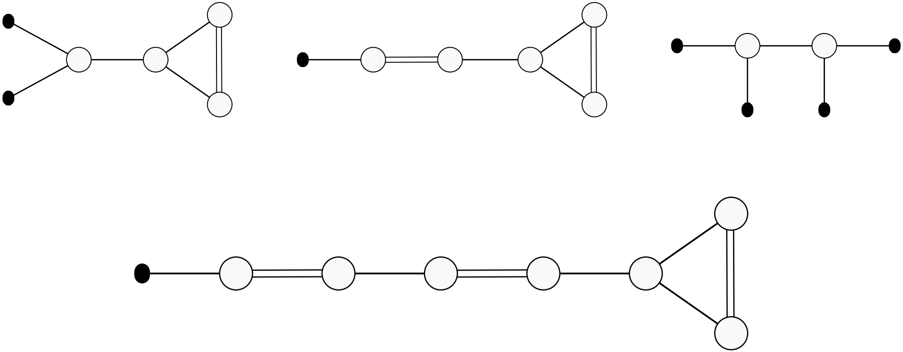


Base d'invariants de $\mathbb{H}^3 \oplus \mathbb{H}^1$

Une base sera donnée par 10 invariants ; ceux de $\mathbb{H}^3$ ainsi que



Base d'invariants de $\mathbb{H}^3 \oplus \mathbb{H}^1$



Merci pour votre attention