

# Géométrie des espaces de tenseurs

## Une approche effective appliquée à la mécanique des milieux continus

Marc Olive

I2M, Aix-Marseille University

Soutenance de thèse  
Marseille 19 Novembre 2014

Contexte mécanique

Introduction

Tenseur d'élasticité

Caractérisation des  
matériaux élastiques

Synthèse et objectifs

Classes de symétrie

Introduction

Classes de sous-groupes

Classes de symétrie  
d'espaces de tenseurs

Opérations de Clips

Conclusion

Invariants

Introduction

Invariants du tenseur  
d'élasticité

Algorithme de Gordan

Séries de Hilbert

Conclusion et  
perspectives

## Contexte mécanique

Tenseur d'élasticité

Caractérisation des matériaux élastiques

## Classes de symétrie

Classes de symétrie d'espaces de tenseurs

Opérations de Clips

## Invariants

Invariants du tenseur d'élasticité

Algorithme de Gordan

Contexte mécanique

Introduction

Tenseur d'élasticité

Caractérisation des  
matériaux élastiques

Synthèse et objectifs

Classes de symétrie

Introduction

Classes de sous-groupes

Classes de symétrie  
d'espaces de tenseurs

Opérations de Clips

Conclusion

Invariants

Introduction

Invariants du tenseur  
d'élasticité

Algorithme de Gordan

Séries de Hilbert

Conclusion et

perspectives

## Contexte mécanique

Tenseur d'élasticité

Caractérisation des matériaux élastiques

## Classes de symétrie

Classes de symétrie d'espaces de tenseurs

Opérations de Clips

## Invariants

Invariants du tenseur d'élasticité

Algorithme de Gordan

### Contexte mécanique

Introduction

Tenseur d'élasticité

Caractérisation des  
matériaux élastiques

Synthèse et objectifs

### Classes de symétrie

Introduction

Classes de sous-groupes

Classes de symétrie  
d'espaces de tenseurs

Opérations de Clips

Conclusion

### Invariants

Introduction

Invariants du tenseur  
d'élasticité

Algorithme de Gordan

Séries de Hilbert

### Conclusion et perspectives

Du point de vue physique, un comportement **élastique** s'observe sur une large quantité de matériaux.



## Question

*Comment donner des noms distincts à des matériaux élastiques anisotropes différents ?*

— **Boehler, Kirillov, Onat (1994)**

Contexte mécanique

Introduction

Tenseur d'élasticité

Caractérisation des  
matériaux élastiques

Synthèse et objectifs

Classes de symétrie

Introduction

Classes de sous-groupes

Classes de symétrie  
d'espaces de tenseurs

Opérations de Clips

Conclusion

Invariants

Introduction

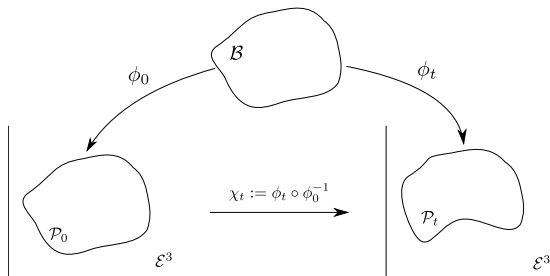
Invariants du tenseur  
d'élasticité

Algorithme de Gordan

Séries de Hilbert

Conclusion et  
perspectives

- ▶ Un **corps matériel** est mathématiquement représenté par une variété différentielle « nue », noté  $\mathcal{B}$  : il est composé d'un **système de points matériels**.
- ▶ Le mouvement d'un corps est un chemin dans l'espace des **plongements**  $\chi_t : \mathcal{P}_0 \rightarrow \mathbb{R}^3$  à valeur dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ .



Contexte mécanique

Introduction

Tenseur d'élasticité

Caractérisation des  
matériaux élastiques

Synthèse et objectifs

Classes de symétrie

Introduction

Classes de sous-groupes

Classes de symétrie  
d'espaces de tenseurs

Opérations de Clips

Conclusion

Invariants

Introduction

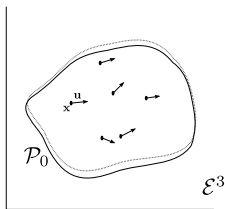
Invariants du tenseur  
d'élasticité

Algorithme de Gordan

Séries de Hilbert

Conclusion et  
perspectives

- ▶ En **petite déformation** le mouvement est le **flot d'un champ de vecteur  $\mathbf{u}$**  (déplacement).



- ▶ Le **tenseur des petites déformations** caractérise dans quelle mesure une transformation donnée diffère d'un déplacement **rigide**.
- ▶ Il est défini par

$$\epsilon := \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [(\chi_t^*(\mathbf{q}) - \mathbf{q})]_{|_{t=0}} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$$

où  $\mathbf{q}$  est la métrique canonique de  $\mathbb{R}^3$  et  $\chi_t^*(\mathbf{q})$  est le **pull-back** de cette métrique.

Contexte mécanique

Introduction

Tenseur d'élasticité

Caractérisation des matériaux élastiques

Synthèse et objectifs

Classes de symétrie

Introduction

Classes de sous-groupes

Classes de symétrie d'espaces de tenseurs

Opérations de Clifs

Conclusion

Invariants

Introduction

Invariants du tenseur d'élasticité

Algorithme de Gordan

Séries de Hilbert

Conclusion et perspectives

- ▶ Dans la théorie classique, les **forces internes** (qui assurent la cohésion de la matière) sont décrites par un tenseur d'ordre 2 symétrique ; le **tenseur des contraintes**  $\sigma$  introduit par **Cauchy (1822)**.
- ▶ En toute généralité il n'y aucune relation particulière entre  $\sigma$  et  $\varepsilon$ .
- ▶ Sans force de volume, la nullité de la somme des forces s'écrit :

$$\operatorname{div} \sigma = 0.$$

- ▶ Il y a six inconnues pour trois équations : le système est **sous-déterminé**.

## Contexte mécanique

### Introduction

#### Tenseur d'élasticité

#### Caractérisation des matériaux élastiques

#### Synthèse et objectifs

## Classes de symétrie

### Introduction

#### Classes de sous-groupes

#### Classes de symétrie d'espaces de tenseurs

#### Opérations de Clips

#### Conclusion

## Invariants

### Introduction

#### Invariants du tenseur d'élasticité

#### Algorithme de Gordan

#### Séries de Hilbert

## Conclusion et perspectives

- ▶ L'équation d'équilibre s'applique aussi bien pour le bois que pour l'eau, l'acier, etc.
- ▶ Il faut compléter l'équation d'équilibre par des **lois de comportements** caractéristiques du milieu étudié : comportement plastique, visqueux, élastique, etc.
- ▶ En **élasticité linéaire** on postule une **relation linéaire** entre le tenseur des petites déformations et le tenseur des contraintes.
- ▶ Cette relation linéaire s'exprime par un **tenseur  $\mathbf{C}$  d'ordre 4** tel que

$$\sigma^{ij} = \mathbf{C}^{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

qui est la **loi de Hooke généralisée**.

Contexte mécanique

Introduction

**Tenseur d'élasticité**

Caractérisation des  
matériaux élastiques

Synthèse et objectifs

Classes de symétrie

Introduction

Classes de sous-groupes

Classes de symétrie  
d'espaces de tenseurs

Opérations de Clips

Conclusion

Invariants

Introduction

Invariants du tenseur  
d'élasticité

Algorithme de Gordan

Séries de Hilbert

Conclusion et  
perspectives



- ▶ Du fait des symétries de  $\sigma$  et  $\varepsilon$ , on a les **petites symétries**

$$\mathbf{C}_{ijkl} = \mathbf{C}_{jikl} = \mathbf{C}_{ijlk}.$$

- ▶ Pour un matériau **hyper-élastique**, où le travail élastique

$$W_\varepsilon(\delta\varepsilon) := \int_{\mathcal{P}} \sigma : \delta\varepsilon \text{ vol} = \int_{\mathcal{P}} (\mathbf{C} : \varepsilon) : \delta\varepsilon \text{ vol}$$

dérive d'un potentiel (forme fermée), on a la **grande symétrie**

$$\mathbf{C}_{ijkl} = \mathbf{C}_{klij}.$$

- ▶ On définit l'**espace vectoriel  $\mathbb{E}1a$  (de dimension 21) des tenseurs d'élasticité** :

$$\mathbb{E}1a = \mathbb{S}^2(\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3)).$$

Contexte mécanique

Introduction

**Tenseur d'élasticité**

Caractérisation des  
matériaux élastiques

Synthèse et objectifs

Classes de symétrie

Introduction

Classes de sous-groupes

Classes de symétrie  
d'espaces de tenseurs

Opérations de Clips

Conclusion

Invariants

Introduction

Invariants du tenseur  
d'élasticité

Algorithme de Gordan

Séries de Hilbert

Conclusion et

perspectives

- ▶ En élasticité linéaire, les propriétés élastiques d'un matériau homogène sont décrites par un tenseur d'élasticité.
- ▶ Un même matériau **tourné dans l'espace** est décrit (en général) par un autre tenseur  $\mathbf{C} \mapsto g \cdot \mathbf{C}$ .

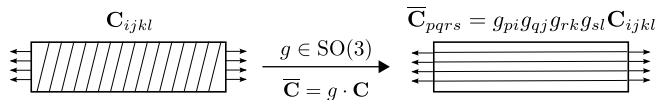
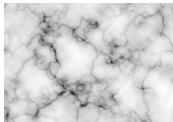


FIGURE: Deux éprouvettes différentes d'un même matériau.

## Matériaux élastiques

Un "matériau élastique homogène" est définie par une **orbite** d'un tenseur  $\mathbf{C}$  sous l'action du groupe des rotations. Décrire les matériaux élastiques revient à décrire l'**espace des orbites**  $\mathbb{E}l_a/SO(3)$ .

- ▶ La modélisation du comportement élastique doit tenir compte de la **micro-structure** des différents matériaux.



- ▶ Cette micro-structure détermine une **symétrie matérielle** du matériau.
- ▶ La **symétrie physique** est donnée par le **groupe de symétrie** du tenseur d'élasticité

$$H_{\mathbf{C}} := \{h \in SO(3), \quad h \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C}\}$$

- ▶ Selon le **principe de Curie (1894)**, les symétries matérielles doivent se retrouver dans les symétries physiques.

Contexte mécanique

Introduction

Tenseur d'élasticité

Caractérisation des  
matériaux élastiques

Synthèse et objectifs

Classes de symétrie

Introduction

Classes de sous-groupes

Classes de symétrie  
d'espaces de tenseurs

Opérations de Clips

Conclusion

Invariants

Introduction

Invariants du tenseur  
d'élasticité

Algorithme de Gordan

Séries de Hilbert

Conclusion et

perspectives

- ▶ Si deux tenseurs  $\mathbf{C}$  et  $\bar{\mathbf{C}}$  sont dans la même orbite, alors leur groupe de symétrie sont **conjugués**

$$H_{\bar{\mathbf{C}}} = gH_{\mathbf{C}}g^{-1}, \quad g \in SO(3).$$

- ▶ Deux tenseurs ayant des groupes de symétrie conjugués ne sont pas nécessairement dans la même orbite.
- ▶ Une **classe de symétrie** d'un matériau élastique homogène est une classe de conjugaison d'un groupe de symétrie

$$[H_{\mathbf{C}}] := \left\{ gH_{\mathbf{C}}g^{-1}, \quad g \in SO(3) \right\}.$$

- ▶ Des matériaux ayant même classe de symétries définissent une **strate**.

Contexte mécanique

Introduction

Tenseur d'élasticité

Caractérisation des  
matériaux élastiques

Synthèse et objectifs

Classes de symétrie

Introduction

Classes de sous-groupes

Classes de symétrie  
d'espaces de tenseurs

Opérations de Clips

Conclusion

Invariants

Introduction

Invariants du tenseur  
d'élasticité

Algorithme de Gordan

Séries de Hilbert

Conclusion et  
perspectives

- ▶ On cherche à décrire un **espace d'orbites**  $V/G$  d'une représentation réelle d'un groupe compact. C'est un problème mathématique difficile :
  - ▶ en général il ne s'agit pas d'une variété différentiable ;
  - ▶ il se décompose en **strates** caractérisées par leur classe de symétrie.
- ▶ Objectifs :
  1. **déterminer explicitement** les classes de symétrie ;
  2. décrire les strates, et plus généralement l'espace des orbites, au moyen d'**invariants**.

Contexte mécanique

Introduction

Tenseur d'élasticité

Caractérisation des  
matériaux élastiques

Synthèse et objectifs

Classes de symétrie

Introduction

Classes de sous-groupes

Classes de symétrie  
d'espaces de tenseurs

Opérations de Clips

Conclusion

Invariants

Introduction

Invariants du tenseur  
d'élasticité

Algorithme de Gordan

Séries de Hilbert

Conclusion et  
perspectives

## Contexte mécanique

Tenseur d'élasticité

Caractérisation des matériaux élastiques

## Classes de symétrie

Classes de symétrie d'espaces de tenseurs

Opérations de Clips

## Invariants

Invariants du tenseur d'élasticité

Algorithme de Gordan

Contexte mécanique

Introduction

Tenseur d'élasticité

Caractérisation des  
matériaux élastiques

Synthèse et objectifs

Classes de symétrie

Introduction

Classes de sous-groupes

Classes de symétrie  
d'espaces de tenseurs

Opérations de Clips

Conclusion

Invariants

Introduction

Invariants du tenseur  
d'élasticité

Algorithme de Gordan

Séries de Hilbert

Conclusion et  
perspectives

## Théorème

*Pour toute représentation réelle  $(V, G)$  d'un groupe de Lie compact, l'espace des orbites  $V/G$  possède un **nombre fini** de classes de symétrie.*

1. Il n'existe pas de méthode générale pour **déterminer effectivement** ces classes de symétrie.
2. Dans la suite, on s'intéresse aux représentations du groupe  **$G = O(3)$  ou  $G = SO(3)$** .

- ▶ **Ihrig–Golubitsky (1984)** ont calculé les classes de symétrie pour les **représentations irréductibles** de  $O(3)$  et  $SO(3)$ .
- ▶ **Forte et Vianello (1996)** ont établi l'existence de **8 classes de symétrie** pour l'élasticité :

Nom	Classe	Nom	Classe
Isotrope	$[SO(3)]$	Trigonale	$[D_3]$
Cubique	$[O]$	Orthotropique	$[D_2]$
Isotrope transverse	$[O(2)]$	Monoclinique	$[Z_2]$
Tétraogonale	$[D_4]$	Triclinic	$[1]$

Contexte mécanique

Introduction

Tenseur d'élasticité

Caractérisation des matériaux élastiques

Synthèse et objectifs

Classes de symétrie

Introduction

Classes de sous-groupes

Classes de symétrie d'espaces de tenseurs

Opérations de Clips

Conclusion

Invariants

Introduction

Invariants du tenseur d'élasticité

Algorithme de Gordan

Séries de Hilbert

Conclusion et perspectives



- ▶ J'ai développé un procédé systématique pour déterminer les classes de symétries d'une représentation  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$  d'un groupe compact :
  1. une fois connue les classes de symétrie des irréductibles ;
  2. une fois établies des "tables de multiplication" sur les classes de symétries.
- ▶ Pour cela, j'ai introduit une opération binaire sur les classes de symétrie, appelée **opération de clips**

$$\mathfrak{J}(V_1 \oplus V_2) = \mathfrak{J}(V_1) \odot \mathfrak{J}(V_2)$$

où  $\mathfrak{J}(V)$  désigne l'ensemble des classes de symétrie de  $V$ .

Contexte mécanique

Introduction

Tenseur d'élasticité

Caractérisation des  
matériaux élastiques

Synthèse et objectifs

Classes de symétrie

Introduction

Classes de sous-groupes

Classes de symétrie  
d'espaces de tenseurs

Opérations de Clips

Conclusion

Invariants

Introduction

Invariants du tenseur  
d'élasticité

Algorithme de Gordan

Séries de Hilbert

Conclusion et  
perspectives

- ▶ Les **représentations irréductibles** de  $O(3)$  ou  $SO(3)$  sont données par les espaces de **tenseurs harmoniques**  $\mathbb{H}^n$  (tenseurs d'ordre  $n$  totalement symétriques de trace nulle sur  $\mathbb{R}^3$ ).
- ▶ La **décomposition harmonique** de l'espace  $\mathbb{E}la$  est :

$$\mathbb{E}la \simeq \mathbb{H}^4 \oplus \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^0 \oplus \mathbb{H}^0.$$

- ▶ Nous connaissons les classes de symétrie d'une **représentation irréductible** (Ihrig–Golubitsky (1984)).
- ▶ Nous avons construit les tables dans le cas des représentations des classes de sous-groupes de  $O(3)$  et  $SO(3)$ .

Contexte mécanique

Introduction

Tenseur d'élasticité

Caractérisation des  
matériaux élastiques

Synthèse et objectifs

Classes de symétrie

Introduction

Classes de sous-groupes

Classes de symétrie  
d'espaces de tenseurs

Opérations de Clips

Conclusion

Invariants

Introduction

Invariants du tenseur  
d'élasticité

Algorithme de Gordan

Séries de Hilbert

Conclusion et  
perspectives

On distingue les sous-groupes  $\mathbb{1}$ ,  $SO(2)$ ,  $O(2)$ , puis les sous-groupes

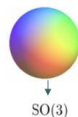
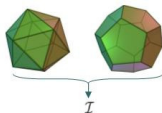
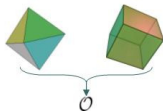
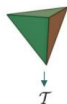
- cycliques  $Z_n$  ( $n \geq 2$ );
- diédraux  $D_n$  ( $n \geq 2$ );
- du tétraèdre  $\mathcal{T}$ ;
- de l'octaèdre  $\mathcal{O}$ ;
- de l'icosaèdre  $\mathcal{I}$ .



(a)  $Z_3$



(b)  $D_3$



Contexte mécanique

Introduction

Tenseur d'élasticité

Caractérisation des

matériaux élastiques

Synthèse et objectifs

Classes de symétrie

Introduction

Classes de sous-groupes

Classes de symétrie  
d'espaces de tenseurs

Opérations de Clips

Conclusion

Invariants

Introduction

Invariants du tenseur  
d'élasticité

Algorithme de Gordan

Séries de Hilbert

Conclusion et  
perspectives

## Définition (Olive)

Pour deux classes de sous-groupes  $[H_1]$  et  $[H_2]$  d'un groupe compact  $G$ , on définit

$$[H_1] \odot [H_2] := \{ [H_1 \cap gH_2g^{-1}], \quad \forall g \in G \}.$$

Exemples : sous-groupes planaires de  $SO(3)$ 

Pour tout entier  $m, n \geq 2$ ,

$\odot$	$[Z_n]$	$[D_n]$
$[Z_m]$	$[\mathbf{1}], [Z_d]$	
$[D_m]$	$[\mathbf{1}], [Z_{d_2}]$ $[Z_d]$	$[\mathbf{1}], [Z_{d_2}]$ $[Z_{d'_2}], [Z_{dz}]$ $[Z_d], [D_d]$

$$\begin{aligned} d &:= \text{pgdc}(m, n), \\ d_2 &:= \text{pgcd}(n, 2), \\ d'_2 &:= \text{pgcd}(m, 2), \\ dz &:= \begin{cases} 2 & \text{si } d = 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}. \end{aligned}$$

Contexte mécanique

Introduction

Tenseur d'élasticité

Caractérisation des

matériaux élastiques

Synthèse et objectifs

Classes de symétrie

Introduction

Classes de sous-groupes

Classes de symétrie

d'espaces de tenseurs

Opérations de Clips

Conclusion

Invariants

Introduction

Invariants du tenseur

d'élasticité

Algorithme de Gordan

Séries de Hilbert

Conclusion et

perspectives

## Lemme

Pour deux représentations linéaires  $V_1$  et  $V_2$  du groupe  $G$ , on note

$$\mathfrak{I}(V_1) \odot \mathfrak{I}(V_2) := \bigcup_{[H_1] \in \mathfrak{I}(V_1), [H_2] \in \mathfrak{I}(V_2)} [H_1] \odot [H_2].$$

Alors

$$\mathfrak{I}(V_1 \oplus V_2) = \mathfrak{I}(V_1) \odot \mathfrak{I}(V_2).$$

## Exemple : application à l'élasticité

On a  $\mathfrak{I}(\mathbb{H}^2) = \{[D_2], [O(2)], [SO(3)]\}$ ,

$$\mathfrak{I}(\mathbb{H}^4) = \{[1], [Z_2], [D_2], [D_3], [D_4], [\mathcal{O}], [O(2)], [SO(3)]\}.$$

Donc on calcule itérativement

$$\mathfrak{I}(\mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^2) = \mathfrak{I}(\mathbb{H}^2) \odot \mathfrak{I}(\mathbb{H}^2) = \{[1], [Z_2], [D_2], [O(2)], [SO(3)]\},$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}(\text{Ela}) &= \mathfrak{I}(\mathbb{H}^4) \odot \mathfrak{I}(\mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^2) \\ &= \{[1], [Z_2], [D_2], [D_3], [D_4], [\mathcal{O}], [O(2)], [SO(3)]\}. \end{aligned}$$

Contexte mécanique

Introduction

Tenseur d'élasticité

Caractérisation des

matériaux élastiques

Synthèse et objectifs

Classes de symétrie

Introduction

Classes de sous-groupes

Classes de symétrie  
d'espaces de tenseurs

Opérations de Clips

Conclusion

Invariants

Introduction

Invariants du tenseur  
d'élasticité

Algorithme de Gordan

Séries de Hilbert

Conclusion et  
perspectives

- ▶ Nous avons développé une méthode générale pour trouver les classes de symétrie de toute représentation de  $O(3)$  ou  $SO(3)$ .
- ▶ Nous avons obtenu des **théorèmes généraux** pour toute **loi de comportement tensorielle** :
  1. Olive, M., & Auffray, N. (2014). Symmetry classes for **odd-order tensors**. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*.
  2. Olive, M., & Auffray, N. (2013). Symmetry classes for **even-order tensors**. *Mathematics and Mechanics of Complex Systems*.

Contexte mécanique

Introduction

Tenseur d'élasticité

Caractérisation des  
matériaux élastiques

Synthèse et objectifs

Classes de symétrie

Introduction

Classes de sous-groupes

Classes de symétrie  
d'espaces de tenseurs

Opérations de Clips

**Conclusion**

Invariants

Introduction

Invariants du tenseur  
d'élasticité

Algorithme de Gordan

Séries de Hilbert

Conclusion et  
perspectives

## Contexte mécanique

Tenseur d'élasticité

Caractérisation des matériaux élastiques

## Classes de symétrie

Classes de symétrie d'espaces de tenseurs

Opérations de Clips

## Invariants

Invariants du tenseur d'élasticité

Algorithme de Gordan

Contexte mécanique

Introduction

Tenseur d'élasticité

Caractérisation des  
matériaux élastiques

Synthèse et objectifs

Classes de symétrie

Introduction

Classes de sous-groupes

Classes de symétrie  
d'espaces de tenseurs

Opérations de Clips

Conclusion

Invariants

Introduction

Invariants du tenseur  
d'élasticité

Algorithme de Gordan

Séries de Hilbert

Conclusion et  
perspectives

- ▶ Un tenseur d'élasticité isotrope

$$(\mathbf{C}_{\lambda, \mu})_{ijkl} := \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}).$$

est caractérisé par les deux **coefficients de Lamé**  $\lambda$  et  $\mu$ , qui sont des **invariants**.

- ▶ Plus généralement, on cherche à décrire les autres strates à l'aide de **polynômes invariants**.
- ▶ L'algèbre des invariants d'un groupe compact est de **type fini** (Hilbert (1890)).
- ▶ Le **calcul explicite** d'une famille génératrice finie de cette algèbre est (en général) un problème mathématique difficile.

Contexte mécanique

Introduction

Tenseur d'élasticité

Caractérisation des  
matériaux élastiques

Synthèse et objectifs

Classes de symétrie

Introduction

Classes de sous-groupes

Classes de symétrie  
d'espaces de tenseurs

Opérations de Clips

Conclusion

Invariants

Introduction

Invariants du tenseur  
d'élasticité

Algorithme de Gordan

Séries de Hilbert

Conclusion et

perspectives



## Théorème (Weyl (1939))

L'algèbre des polynômes **SO(3) invariants** de  $p$  vecteurs ( $p \geq 3$ ) est engendrée par la **famille finie**

$$\theta_{ij}(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle, \quad i \leq j, \quad \eta_{ijk}(\mathbf{v}) := \det(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k), \quad \mathbf{v} := (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p).$$

- ▶ Pour deux tenseurs symétriques  $\mathbf{A}_1$  et  $\mathbf{A}_2$  d'ordre 2, **Spencer–Rivlin (1959)** ont montré qu'une famille génératrice est donnée par  $\text{tr}(\mathbf{A}_i)$ ,  $\text{tr}(\mathbf{A}_i^2)$ ,  $\text{tr}(\mathbf{A}_i^3)$  ( $i = 1, 2$ ) et les **invariants joints**

$$\text{tr}(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2), \text{tr}(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2^2), \text{tr}(\mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2), \text{tr}(\mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2^2).$$

- ▶ Ils ont obtenu des résultats pour 3, 4 et 5 tenseurs symétriques d'ordre 2.

Contexte mécanique

Introduction

Tenseur d'élasticité

Caractérisation des  
matériaux élastiques

Synthèse et objectifs

Classes de symétrie

Introduction

Classes de sous-groupes

Classes de symétrie  
d'espaces de tenseurs

Opérations de Clips

Conclusion

Invariants

Introduction

Invariants du tenseur  
d'élasticité

Algorithme de Gordan

Séries de Hilbert

Conclusion et

perspectives

- ▶ En utilisant des résultats de **Young (1899)**, on en déduit des **familles génératrices minimales** des espaces  $(\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3)^{\oplus p}, \text{SO}(3))$ .

Degré des invariants	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$
1	3	4	5
2	6	10	15
3	10	20	35
4	6	20	50
5	3	20	76
6	-	10	70
#	28	84	251

- ▶ Ces familles sont obtenues par des **opérations de contraction** qui fournissent des familles génératrices **infinies** mais se réduisent par le **théorème de Cayley–Hamilton**.

Contexte mécanique

Introduction

Tenseur d'élasticité

Caractérisation des  
matériaux élastiques

Synthèse et objectifs

Classes de symétrie

Introduction

Classes de sous-groupes

Classes de symétrie  
d'espaces de tenseurs

Opérations de Clips

Conclusion

Invariants

Introduction

Invariants du tenseur  
d'élasticité

Algorithme de Gordan

Séries de Hilbert

Conclusion et  
perspectives

## Définition

Une famille séparante  $\mathcal{S}$  (une **base fonctionnelle**) sépare les orbites autant que les invariants :

$$\mathbf{h}(\mathbf{v}_1) = \mathbf{h}(\mathbf{v}_2), \quad \forall \mathbf{h} \in \mathcal{S} \Rightarrow \mathbf{p}(\mathbf{v}_1) = \mathbf{p}(\mathbf{v}_2), \quad \forall \mathbf{p} \in \mathbb{R}[V]^G.$$

## Exemple

Pour  $(\mathbb{S}^2(\mathbb{R}^3), \text{SO}(3))$ , la famille  $\{\text{tr}(\mathbf{A}), \text{tr}(\mathbf{A}^2), \text{tr}(\mathbf{A}^3)\}$  est génératrice. Comme  $\text{tr}(\mathbf{A}^2) \geq 0$ , la famille  $\{\text{tr}(\mathbf{A}), (\text{tr}(\mathbf{A}^2))^2, \text{tr}(\mathbf{A}^3)\}$  est un ensemble séparant qui n'est pas une famille génératrice.

## Théorème

*Dans le cas d'une représentation **réelle** d'un groupe compact, l'algèbre des invariants polynomiaux **sépare les orbites**.*

Contexte mécanique

Introduction

Tenseur d'élasticité

Caractérisation des  
matériaux élastiques

Synthèse et objectifs

Classes de symétrie

Introduction

Classes de sous-groupes

Classes de symétrie  
d'espaces de tenseurs

Opérations de Clips

Conclusion

Invariants

Introduction

Invariants du tenseur  
d'élasticité

Algorithme de Gordan

Séries de Hilbert

Conclusion et  
perspectives

Smith, Wang, Boehler (1970-1977) ont obtenu des familles de séparants pour des espaces de tenseurs d'ordres inférieurs ou égal à 2.

Degré des invariants	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$
1	3	4	5
2	6	10	15
3	10	20	35
4	3	6	10
#	22(28)	40(84)	65(251)

Familles de séparants de  $(S^2(\mathbb{R}^3))^{\oplus p}, SO(3)$

Contexte mécanique

Introduction

Tenseur d'élasticité

Caractérisation des  
matériaux élastiques

Synthèse et objectifs

Classes de symétrie

Introduction

Classes de sous-groupes

Classes de symétrie  
d'espaces de tenseurs

Opérations de Clips

Conclusion

Invariants

Introduction

Invariants du tenseur  
d'élasticité

Algorithme de Gordan

Séries de Hilbert

Conclusion et  
perspectives

- ▶ Les méthodes traditionnelles ne fonctionnent plus pour les espaces de tenseurs d'ordre plus grand que 3 (en particulier  $\mathbb{E}1a$ ).
- ▶ Des résultats connus pour ces espaces utilisent la **théorie classique des invariants** (formes binaires) :
  - ▶ **Smith–Bao (1997)** traitent des invariants de  $(\mathbb{H}^3, O(3))$  ;
  - ▶ **Boehler, Kirilov, Onat (1994)** traitent des invariants de  $(\mathbb{H}^4, SO(3))$ .
- ▶ Boehler et al. utilisent des résultats de **Von Gall (1880)** pour obtenir une famille génératrice finie de 9 polynômes  $SO(3)$ -invariants sur  $\mathbb{H}^4$ .
- ▶ Depuis 1994, le problème des **invariants joints** de l'élasticité est resté ouvert.
- ▶ J'ai résolu ce problème en utilisant la théorie classique des invariants.

Contexte mécanique

Introduction

Tenseur d'élasticité

Caractérisation des

matériaux élastiques

Synthèse et objectifs

Classes de symétrie

Introduction

Classes de sous-groupes

Classes de symétrie

d'espaces de tenseurs

Opérations de Clips

Conclusion

Invariants

Introduction

Invariants du tenseur

d'élasticité

Algorithme de Gordan

Séries de Hilbert

Conclusion et

perspectives

- ▶ Chaque **représentation réelle**  $V$  de  $SO(3, \mathbb{R})$  s'étend en une **représentation complexe** de  $SL(2, \mathbb{C})$  sur  $V^{\mathbb{C}}$ .
- ▶ Les représentations irréductibles de  $SL(2, \mathbb{C})$  sont données par les **espaces de formes binaires**  $S_n$  (polynômes homogènes de degré  $n$  sur  $\mathbb{C}^2$ ).
- ▶ On a établi un **isomorphisme** (explicite) entre  $\mathbb{H}^n(\mathbb{C}^3)$  et  $S_{2n}$ .
- ▶ En termes d'algèbre d'invariants, on a l'isomorphisme

$$\mathbb{C}[\mathbb{H}^n]^{SO(3)} \simeq \mathbb{C}[S_{2n}]^{SL(2, \mathbb{C})}.$$

- ▶ Pour l'**élasticité**,

$$\mathbb{C}[Ela]^{SO(3)} \simeq \mathbb{C}[S_8 \oplus S_4 \oplus S_4 \oplus S_0 \oplus S_0]^{SL(2, \mathbb{C})}.$$

Contexte mécanique

Introduction

Tenseur d'élasticité

Caractérisation des  
matériaux élastiques

Synthèse et objectifs

Classes de symétrie

Introduction

Classes de sous-groupes

Classes de symétrie  
d'espaces de tenseurs

Opérations de Clips

Conclusion

Invariants

Introduction

Invariants du tenseur  
d'élasticité

Algorithme de Gordan

Séries de Hilbert

Conclusion et

perspectives

- ▶ Au XIX<sup>ième</sup>, les "anciens" (Cayley, Sylvester, Clebsch, Gordan, etc) avaient développé des techniques de calculs très efficaces (sans ordinateur), basées sur la **méthode symbolique**.
- ▶ **Gordan (1968)** a développé un algorithme de calcul ayant abouti à des résultats importants pour l'époque.
- ▶ En appliquant cet algorithme, **Gordan et Von Gall (1868-1888)** obtiennent des familles génératrices finies pour les invariants de  $S_5$  à  $S_8$ .
- ▶ En 1890, Hilbert propose une **méthode alternative** qui est plus générale, mais qui ne produit à cette époque aucun nouveaux résultats effectifs.
- ▶ **Kemper, Derksen, Sturmfels (1998, 2001, 2008)** ont construit des algorithmes basés sur cette approche mais seuls quelques cas simples de formes binaires sont traités en exemple.

Contexte mécanique

Introduction

Tenseur d'élasticité

Caractérisation des  
matériaux élastiques

Synthèse et objectifs

Classes de symétrie

Introduction

Classes de sous-groupes

Classes de symétrie  
d'espaces de tenseurs

Opérations de Clips

Conclusion

Invariants

Introduction

Invariants du tenseur  
d'élasticité

Algorithme de Gordan

Séries de Hilbert

Conclusion et  
perspectives

- ▶ **Popoviciu–Brouwer (2010)**, en s'appuyant sur des travaux de **Dixmier–Lazard (1984)**, obtiennent des familles génératrices finies pour les invariants de  $S_9$  et  $S_{10}$ . Le cas des **invariants joints** ne semble pas accessible dans leur approche.
- ▶ **Weyman, Pasechnik, Cröni (1993-2002)** ont repris l'algorithme de Gordan, sans aboutir à de nouveaux résultats.
- ▶ Nous avons reformulé la méthode symbolique dans le cadre de la **représentation des groupes (Weyl (1939))**, et nous avons optimisé l'algorithme de Gordan en utilisant une approche **graphique** inspirée de **Olver–Shakiban (1989)**.
- ▶ Par cette nouvelle approche, nous avons pu obtenir de nombreux nouveaux résultats, notamment les invariants du tenseur d'élasticité.

Contexte mécanique

Introduction

Tenseur d'élasticité

Caractérisation des  
matériaux élastiques

Synthèse et objectifs

Classes de symétrie

Introduction

Classes de sous-groupes

Classes de symétrie  
d'espaces de tenseurs

Opérations de Clips

Conclusion

Invariants

Introduction

Invariants du tenseur  
d'élasticité

Algorithme de Gordan

Séries de Hilbert

Conclusion et  
perspectives

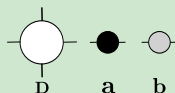


## Théorème (Olive)

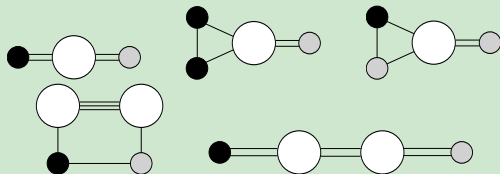
L'algèbre des invariants de l'espace des tenseurs d'élasticité possède une **famille génératrice minimale de cardinal 299**.

## Exemples

Pour  $\mathbf{C} := (\mathbf{D}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \lambda, \mu) \in \mathbb{H}^4 \oplus \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^2 \oplus \mathbb{H}^0 \oplus \mathbb{H}^0$  on note



Une arête désigne une **contraction**. On obtient des invariants joints multigradués de degré  $\leq 4$



Contexte mécanique  
Introduction  
Tenseur d'élasticité  
Caractérisation des  
matériaux élastiques  
Synthèse et objectifs

Classes de symétrie  
Introduction  
Classes de sous-groupes  
Classes de symétrie  
d'espaces de tenseurs  
Opérations de Clips  
Conclusion

Invariants  
Introduction  
Invariants du tenseur  
d'élasticité  
Algorithme de Gordan  
Séries de Hilbert

Conclusion et  
perspectives

1. On sait facilement calculer des invariants de formes binaires mais il est très difficile de déterminer une **famille génératrice finie**.
2. L'**algorithme de Gordan** est une méthode pour construire une telle famille génératrice finie.
3. Cet algorithme nous a donné une famille génératrice finie de plus de 650 000 invariants.
4. Il faut **réduire** cette famille génératrice, ce qui a été fait via la **série de Hilbert** qui code les dimensions des espaces homogènes.

## Contexte mécanique

Introduction

Tenseur d'élasticité

Caractérisation des  
matériaux élastiques

Synthèse et objectifs

## Classes de symétrie

Introduction

Classes de sous-groupes

Classes de symétrie  
d'espaces de tenseurs

Opérations de Clips

Conclusion

## Invariants

Introduction

Invariants du tenseur  
d'élasticité

Algorithme de Gordan

Séries de Hilbert

## Conclusion et perspectives

- ▶ Un covariant d'une forme binaire  $\mathbf{f} \in S_n$  est une forme **équivariante**  $\mathbf{h} \in S_k$  dont les coefficients sont **polynômiaux** en les coordonnées de  $\mathbf{f}$ .
- ▶ L'algèbre des covariants est **bigraduée** par le **degré** (en  $\mathbf{f}$ ) et l'ordre (**degré en  $\mathbf{x}$** ). Un invariant est un **covariant d'ordre 0**.

## Exemple : Hessien d'une cubique

En notant  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = a_0x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3$  et

$$\mathbf{H}(\mathbf{f}, \mathbf{x}) := 2(a_0a_2 - a_1^2)x^2 + 2(a_0a_3 - a_1a_2)xy + 2(a_1a_3 - a_2^2)y^2,$$

alors le diagramme suivant est **commutatif**.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{f} \in S_3 & \xrightarrow{\gamma \in \text{SL}(2, \mathbb{C})} & \bar{\mathbf{f}} \in S_3 \\ \downarrow \text{Hessien} & & \downarrow \text{Hessien} \\ \mathbf{H} \in S_2 & \xrightarrow{\gamma} & \bar{\mathbf{H}} \in S_2 \end{array}$$

Contexte mécanique

Introduction

Tenseur d'élasticité

Caractérisation des  
matériaux élastiques

Synthèse et objectifs

Classes de symétrie

Introduction

Classes de sous-groupes

Classes de symétrie  
d'espaces de tenseurs

Opérations de Clips

Conclusion

Invariants

Introduction

Invariants du tenseur  
d'élasticité

Algorithme de Gordan

Séries de Hilbert

Conclusion et  
perspectives

- L'opérateur de Cayley est l'opérateur  $SL(2, \mathbb{C})$  invariant défini par

$$\Omega_{\alpha\beta} := \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial y_\beta} - \frac{\partial^2}{\partial x_\beta \partial y_\alpha}.$$

- Pour  $\mathbf{f} \in S_m$  et  $\mathbf{g} \in S_n$ , on définit leur transvectant d'index  $r$  par

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g})_r := [\Omega_{\alpha\beta}^r \mathbf{f}(\mathbf{x}_\alpha) \mathbf{g}(\mathbf{x}_\beta)]_{|\mathbf{x}_\alpha = \mathbf{x}_\beta = \mathbf{x}}, \quad \mathbf{x}_\alpha := (x_\alpha, y_\alpha) \in \mathbb{C}^2.$$

## Théorème

Pour tout espace  $V = S_{n_1} \oplus \dots \oplus S_{n_s}$  de formes binaires, l'algèbre des covariants  $\mathbf{Cov}(V)$  est engendrée par la famille composée des formes binaires  $\mathbf{f}_i \in S_{n_i}$  ainsi que des transvectants

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)_{r_1}, \quad ((\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)_{r_1}, \mathbf{f}_3)_{r_2}, \dots \quad \mathbf{f}_i \in S_{n_i}, \quad r_i \in \mathbb{N}.$$

Contexte mécanique

Introduction

Tenseur d'élasticité

Caractérisation des

matériaux élastiques

Synthèse et objectifs

Classes de symétrie

Introduction

Classes de sous-groupes

Classes de symétrie

d'espaces de tenseurs

Opérations de Clips

Conclusion

Invariants

Introduction

Invariants du tenseur

d'élasticité

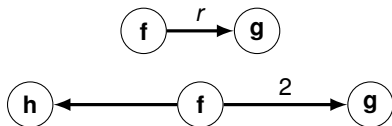
Algorithme de Gordan

Séries de Hilbert

Conclusion et

perspectives

Une forme binaire  $\mathbf{f} \in S_n$  est représentée par un **atome de valence  $n$** .  
L'opérateur  $\Omega_{\alpha\beta}^r$ , qui est une **contraction** définie à partir du déterminant, est représenté par une **arête orientée de poids  $r$** . On définit ainsi des **covariants moléculaires**



## Théorème

Pour tout espace  $V$  de formes binaires, l'algèbre des covariants  $\mathbf{Cov}(V)$  est engendrée par la famille (infinie) des covariants moléculaires.

Contexte mécanique

Introduction

Tenseur d'élasticité

Caractérisation des

matériaux élastiques

Synthèse et objectifs

Classes de symétrie

Introduction

Classes de sous-groupes

Classes de symétrie

d'espaces de tenseurs

Opérations de Clips

Conclusion

Invariants

Introduction

Invariants du tenseur

d'élasticité

Algorithme de Gordan

Séries de Hilbert

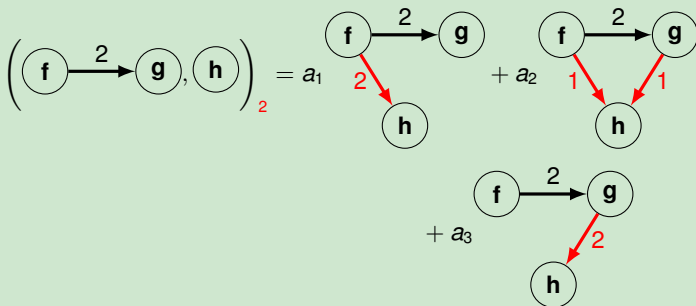
Conclusion et

perspectives

## Proposition

Pour tout entier  $r \geq 0$  et tout covariants moléculaires  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{E}$ , le transvectant  $(\mathbf{D}, \mathbf{E})_r$  se décompose en molécules  $\mathbf{M}^{\nu(r)}$  (appelées *termes*), pour chaque *attache* possible  $\nu(r)$  entre  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{E}$ .

## Exemple



Contexte mécanique

Introduction

Tenseur d'élasticité

Caractérisation des matériaux élastiques

Synthèse et objectifs

Classes de symétrie

Introduction

Classes de sous-groupes

Classes de symétrie d'espaces de tenseurs

Opérations de Clifs

Conclusion

Invariants

Introduction

Invariants du tenseur d'élasticité

Algorithme de Gordan

Séries de Hilbert

Conclusion et perspectives

## Proposition

Pour tout terme  $\mathbf{M}^{\nu(r)}$  du transvectant  $(\mathbf{D}, \mathbf{E})_r$ , on a

$$\mathbf{M}^{\nu(r)} = \lambda(\mathbf{D}, \mathbf{E})_r + \sum_{r' < r} \lambda_{r'}(\mathbf{D}', \mathbf{E}')_{r'}, \quad \lambda > 0$$

où  $\mathbf{D}'$  (resp.  $\mathbf{E}'$ ) est un covariant moléculaire constitué des mêmes atomes que  $\mathbf{D}$  (resp.  $\mathbf{E}$ )

## Exemple

$$\begin{aligned}
 & \left( \begin{array}{c} \text{f} \xrightarrow{2} \text{g} \\ \text{f} \xrightarrow{2} \text{h} \end{array} \right) = \lambda \left( \begin{array}{c} \text{f} \xrightarrow{2} \text{g} \\ \text{h} \end{array} \right)_2 + \lambda_1 \left( \begin{array}{c} \text{f} \xrightarrow{3} \text{g} \\ \text{h} \end{array} \right)_1 \\
 & \quad \quad \quad + \lambda_0 \left( \begin{array}{c} \text{f} \xrightarrow{4} \text{g} \\ \text{h} \end{array} \right)_0
 \end{aligned}$$

Contexte mécanique  
Introduction

Tenseur d'élasticité  
Caractérisation des matériaux élastiques  
Synthèse et objectifs

Classes de symétrie  
Introduction

Classes de sous-groupes  
Classes de symétrie d'espaces de tenseurs  
Opérations de Clips  
Conclusion

Invariants

Introduction  
Invariants du tenseur d'élasticité

Algorithme de Gordan  
Séries de Hilbert

Conclusion et perspectives

L'algorithme de Gordan permet de déterminer une **famille génératrice finie** de  $\mathbf{Cov}(S_m \oplus S_n)$  **une fois connue une famille génératrice finie** de  $\mathbf{Cov}(S_m)$  et  $\mathbf{Cov}(S_n)$ .

## Proposition

Soit  $(\mathbf{f}_i)_{1 \leq i \leq p}$  (resp.  $\mathbf{g}_j$ ) une famille génératrice de  $\mathbf{Cov}(S_m)$  (resp.  $\mathbf{Cov}(S_n)$ ), alors  $\mathbf{Cov}(S_m \oplus S_n)$  est engendré par la famille infinie des transvectants

$$\tau := (\mathbf{f}_1^{\alpha_1} \cdots \mathbf{f}_p^{\alpha_p}, \mathbf{g}_1^{\beta_1} \cdots \mathbf{g}_q^{\beta_q})_r.$$

## Preuve

L'algèbre  $\mathbf{Cov}(S_m \oplus S_n)$  est engendré par des **covariants moléculaires** constitués d'atomes en  $\mathbf{f}_i$  et  $\mathbf{g}_j$ , qui peut toujours s'écrire

$$\text{D} \xrightarrow{\nu(r)} \text{E}, \quad \text{D} \in \mathbf{Cov}(S_m), \quad \text{E} \in \mathbf{Cov}(S_n)$$

Il s'agit d'un **terme**  $\mathbf{M}^{\nu(r)}$  dans  $(\mathbf{D}, \mathbf{E})_r$ . On décompose alors  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{E}$  dans leur base.  $\square$

Contexte mécanique

Introduction

Tenseur d'élasticité

Caractérisation des  
matériaux élastiques

Synthèse et objectifs

Classes de symétrie

Introduction

Classes de sous-groupes

Classes de symétrie  
d'espaces de tenseurs

Opérations de Clips

Conclusion

Invariants

Introduction

Invariants du tenseur  
d'élasticité

Algorithme de Gordan

Séries de Hilbert

Conclusion et  
perspectives



Une observation fondamentale est que si le transvectant

$$(\mathbf{U}, \mathbf{V})_r := (\mathbf{f}_1^{\alpha_1} \cdots \mathbf{f}_p^{\alpha_p}, \mathbf{g}_1^{\beta_1} \cdots \mathbf{g}_q^{\beta_q})_r$$

est **non nul**, alors en notant  $u := \text{Ord}(\mathbf{U}) - r$  (idem pour  $v$ ),

$$\kappa := (\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q, u, v, r) \in \mathbb{N}^{p+q+3}$$

est une solution du **système linéaire diophantien**

$$(S) : \begin{cases} \alpha_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_p \mathbf{a}_p & = u + r \\ \beta_1 \mathbf{b}_1 + \cdots + \beta_q \mathbf{b}_q & = v + r \end{cases}$$

où  $a_i$  est l'ordre de  $\mathbf{f}_i$  et  $b_j$  est l'ordre de  $\mathbf{g}_j$ .

## Lemme

Le système linéaire diophantien (S) possède **une famille finie de solutions irréductibles** (qui ne peut pas s'écrire comme somme de deux solutions).

Contexte mécanique

Introduction

Tenseur d'élasticité

Caractérisation des  
matériaux élastiques

Synthèse et objectifs

Classes de symétrie

Introduction

Classes de sous-groupes

Classes de symétrie  
d'espaces de tenseurs

Opérations de Clips

Conclusion

Invariants

Introduction

Invariants du tenseur  
d'élasticité

Algorithme de Gordan

Séries de Hilbert

Conclusion et  
perspectives

## Théorème de Gordan (1868)

## Théorème (Gordan)

Notons  $\kappa_1, \dots, \kappa_l$  les **solutions irréductibles** de  $(S)$  et notons  $\tau_1, \dots, \tau_l$  les transvectants associés. Alors  $\mathbf{Cov}(S_m \oplus S_n)$  est engendré par  $\tau_1, \dots, \tau_l$ .

## Preuve

Il s'agit d'une récurrence sur l'**index**  $r$  des générateurs  $(\mathbf{U}, \mathbf{V})_r$ .

- ▶ Pour  $r = 0$  on a  $(\mathbf{U}, \mathbf{V})_r = \mathbf{UV}$ . Or chaque  $\mathbf{f}_i$  et  $\mathbf{g}_j$  correspond à une **solution irréductible** donc est dans la famille  $\tau_1, \dots, \tau_l$ ;
- ▶ Si  $(\mathbf{U}, \mathbf{V})_r$  ( $r > 0$ ) correspond à une solution réduite alors

$$(\mathbf{U}, \mathbf{V})_r = \underbrace{\lambda' \mathbf{M}^{\nu(r)}}_{\text{non connexe : prod. de } \tau_j} + \underbrace{\sum_{r' < r} \lambda_{r'} (\mathbf{U}', \mathbf{V}')_{r'}}_{\text{hyp. récurrence}}$$

□

Contexte mécanique

Introduction

Tenseur d'élasticité

Caractérisation des

matériaux élastiques

Synthèse et objectifs

Classes de symétrie

Introduction

Classes de sous-groupes

Classes de symétrie

d'espaces de tenseurs

Opérations de Clifs

Conclusion

Invariants

Introduction

Invariants du tenseur

d'élasticité

Algorithme de Gordan

Séries de Hilbert

Conclusion et

perspectives



L'algèbre des invariants est une **algèbre graduée**  $\mathcal{A}$ . On définit sa **série de Hilbert**

$$H_{\mathcal{A}}(z) := \sum_{k \geq 0} \dim(\mathcal{A}_k) z^k.$$

## Théorème (Formule de Molien–Weyl (1968))

La série de Hilbert de la représentation  $(V, \rho)$  d'un groupe compact  $G$  sur un espace vectoriel de dimension finie s'écrit

$$H(z) = \int_G \frac{1}{\det(\text{Id} - \rho(g)z)} d\mu(g)$$

où  $\text{Id}$  est l'identité de  $GL(V)$  et  $d\mu$  est la *mesure de Haar* sur  $G$ .

## Exemple

$$H_{\text{Ela}}(z) = 1 + 2z + 7z^2 + 22z^3 + 63z^4 + 177z^5 + 487z^6 + \dots$$

Contexte mécanique

Introduction

Tenseur d'élasticité

Caractérisation des  
matériaux élastiques

Synthèse et objectifs

Classes de symétrie

Introduction

Classes de sous-groupes

Classes de symétrie  
d'espaces de tenseurs

Opérations de Clips

Conclusion

Invariants

Introduction

Invariants du tenseur  
d'élasticité

Algorithme de Gordan

**Séries de Hilbert**Conclusion et  
perspectives

- Pour contrôler les **invariants joints** de  $V := S_8 \oplus S_4 \oplus S_4$ , nous utilisons la **série de Hilbert multigradué**

$$H_V(z_8, z_4, \tilde{z}_4) := \sum_{d_8, d_4, d'_4 \geq 0} \dim(\mathbf{Inv}(V)_{d_8, d_4, d'_4}) z_8^{d_8} z_4^{d_4} \tilde{z}_4^{d'_4}.$$

- Une telle série se calcule directement par des packages maple de **Bedyatruk (2011)**

$$H_V(z_8, z_4, \tilde{z}_4) = 1 + z_8^2 + z_4^2 + \tilde{z}_4^2 + z_4 \tilde{z}_4 + z_8^3 + z_8^2 z_4 + z_8^2 \tilde{z}_4 + z_4 \tilde{z}_4^2 + z_8 z_4 \tilde{z}_4 + \dots$$

Contexte mécanique

Introduction

Tenseur d'élasticité

Caractérisation des  
matériaux élastiques

Synthèse et objectifs

Classes de symétrie

Introduction

Classes de sous-groupes

Classes de symétrie  
d'espaces de tenseurs

Opérations de Clips

Conclusion

Invariants

Introduction

Invariants du tenseur  
d'élasticité

Algorithme de Gordan

Séries de Hilbert

Conclusion et  
perspectives

- ▶ Par application de l'algorithme de Gordan sur  $\mathbf{Cov}(S_8)$  et  $\mathbf{Cov}(S_4 \oplus S_4)$ , nous avons résolu un système entier de 81 inconnues.
- ▶ Par des résultats de **Clausen-Fauderbach (1987)** et des scripts de **R. Lercier**, nous avons obtenu une famille génératrice de plus de 650 000 invariants, du **degré 3 au degré 49**.
- ▶ Par des **relations** dans les algèbres  $\mathbf{Cov}(S_8)$  et  $\mathbf{Cov}(S_4 \oplus S_4)$ , nous avons montré la réductibilité des invariants de degré  $\geq 21$ .
- ▶ Par la série de Hilbert multigraduéée, nous avons pu **éliminer les invariants superflus**, du degré 3 au degré 20.
- ▶ Pour ces deux derniers points, nous avons du développer des **scripts écrits en Macaulay 2** et en déduire une famille génératrice minimale des invariants de l'élasticité.

Contexte mécanique

Introduction

Tenseur d'élasticité

Caractérisation des  
matériaux élastiques

Synthèse et objectifs

Classes de symétrie

Introduction

Classes de sous-groupes

Classes de symétrie  
d'espaces de tenseurs

Opérations de Clips

Conclusion

Invariants

Introduction

Invariants du tenseur  
d'élasticité

Algorithme de Gordan

Séries de Hilbert

Conclusion et  
perspectives

1. Nous avons donné une méthode générale basée sur les **opérations de clips** pour déterminer les classes de symétrie d'une représentation quelconque de  $O(3)$  et  $SO(3)$ .
2. Par notre reformulation de l'algorithme de Gordan, nous avons obtenu une famille génératrice minimale des **invariants de l'élasticité**.
3. Dans un travail commun avec **R. Lercier**, nous avons exploité **l'algorithme de Gordan pour les formes simples** pour déterminer une famille génératrice minimale de

$$\mathbf{Cov}(S_9) \text{ et } \mathbf{Cov}(S_{10}).$$

Ces deux familles n'étaient connues que sous la forme de conjecture jusqu'aujourd'hui.

Contexte mécanique

Introduction

Tenseur d'élasticité

Caractérisation des  
matériaux élastiques

Synthèse et objectifs

Classes de symétrie

Introduction

Classes de sous-groupes

Classes de symétrie  
d'espaces de tenseurs

Opérations de Clips

Conclusion

Invariants

Introduction

Invariants du tenseur  
d'élasticité

Algorithme de Gordan

Séries de Hilbert

Conclusion et  
perspectives

- ▶ En s'appuyant sur des résultats de **Bogomolov, Kalysto et Maeda**, on peut aussi chercher des **invariants rationnels** des espaces de tenseurs.
- ▶ Sur la base des 299 invariants de l'élasticité, on peut chercher à en extraire une famille de **séparants** pour optimiser le travail de classification des matériaux élastiques.
- ▶ A partir des travaux initiés par Auffray–Kolev–Petitot, décrire l'**espace des orbites**  $S^3(\mathbb{R}^3)/O(3)$ , où  $S^3(\mathbb{R}^3)$  est l'espace des tenseurs totalement symétriques d'ordre 3.
- ▶ L'algorithme de Gordan, appliqué au cas de  $\mathbf{Cov}(S_{12})$ , encore inconnu jusqu'à ce jour, permettrait de vérifier une conjecture de **Dixmier** sur les **systèmes de paramètres** de cette algèbre.

Contexte mécanique

Introduction

Tenseur d'élasticité

Caractérisation des  
matériaux élastiques

Synthèse et objectifs

Classes de symétrie

Introduction

Classes de sous-groupes

Classes de symétrie  
d'espaces de tenseurs

Opérations de Clips

Conclusion

Invariants

Introduction

Invariants du tenseur  
d'élasticité

Algorithme de Gordan

Séries de Hilbert

Conclusion et  
perspectives

## Publié

- ▶ Olive, M., & Auffray, N. (2014). Isotropic invariants of a completely symmetric third-order tensor. *Journal of Mathematical Physics*, (Accepted).
- ▶ Olive, M., & Auffray, N. (2014). Symmetry classes for odd-order tensors. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 94(5), 421-447.
- ▶ Olive, M., & Auffray, N. (2013). Symmetry classes for even-order tensors. *Mathematics and Mechanics of Complex Systems*, 1(2), 177-210.

## En préparation

- ▶ Olive, M. (2014). *About Gordan's algorithm for binary forms*. arXiv preprint arXiv :1403.2283.
- ▶ Olive, M. *About fundamental relations on binary forms*.
- ▶ Olive, M., Lercier, R. *Covariant basis of nonic and decimic*.
- ▶ Olive, M., Kolev, B., Auffray, N. *Integrity basis of elasticity tensor*.
- ▶ Olive, M., Kolev, B., Auffray, N. *Invariant base approach to 2D elasticity*.
- ▶ Olive, M., Auffray, N. *Stratification of a totally symmetric third order tensor*.
- ▶ Olive, M., Kolev, B., Auffray, N. *Integrity basis of piezoelectricity tensor*.

Contexte mécanique

Introduction

Tenseur d'élasticité

Caractérisation des  
matériaux élastiques

Synthèse et objectifs

Classes de symétrie

Introduction

Classes de sous-groupes

Classes de symétrie  
d'espaces de tenseurs

Opérations de Clips

Conclusion

Invariants

Introduction

Invariants du tenseur  
d'élasticité

Algorithme de Gordan

Séries de Hilbert

Conclusion et  
perspectives